

PROBABILITÉS ET CHAÎNES DE MARKOV – LIVRET D'EXERCICE

NICOLAS CAMPS & RONAN HERRY

TABLE DES MATIÈRES

Comment utiliser cette feuille	1
1. Convergence en loi et convergence étroite	2
1.1. Rappels et révisions	2
1.2. Fonction caractéristique	3
1.3. Propriétés de la convergence en loi	4
1.4. Application du critère de compacité	5
2. Espérances conditionnelles	5
2.1. Cas général	6
2.2. Cas des variables aléatoires de carré intégrable	6
2.3. Conditionnement discret	6
2.4. Loi conditionnelle	7
2.5. Calculs explicites avec des noyaux	7
2.6. Calculs explicites d'espérances et de lois conditionnelles	9
3. Théorème ergodique	9
4. Chaînes de Markov	10
4.1. L'espace canonique	10
4.2. Fonctions harmoniques et mesures stationnaires	11
4.3. Espace d'états fini ou dénombrable	11
4.4. Modélisation	15
4.5. Modèles de population	17
4.6. h -transformation	20
4.7. Espaces d'états non dénombrables	20
5. Exercices supplémentaires	21
5.1. Chaînes de Markov et statistiques	21
5.2. Convergence en loi dans les espaces fonctionnelles	22
5.3. Marches aléatoires sur des groupes	23
5.4. Analyse spectrale	25

Comment utiliser cette feuille. La maîtrise des concepts vus en cours ne peut se faire sans un travail régulier de résolution d'exercices. Chercher les exercices par soi-même fait partie intégrante des attendus de cette classe. Pour vous orienter dans cette recherche, les exercices sont classés en quatre catégories.

- Applications directes du cours ou exemples simples. À faire chez soi en apprenant le cours : chacun demande un argument de quelques lignes au plus et devrait idéalement pouvoir se résoudre de tête.
- ★ Exercices types, qui interrogent directement le matériel du cours. À savoir faire absolument : on ne peut pas prétendre valider ce cours sans savoir résoudre la plupart d'entre eux. Attention cependant : connaître par cœur la solution d'un exercice sans en avoir compris le ressort ne garantit en rien une bonne note à l'examen.
- 📍 Problèmes qui demandent une idée, une astuce de calcul, ou de mobiliser plusieurs résultats

du cours à la fois. Plus exigeants que les précédents, mais encore pleinement dans le cadre du cours, ils sont à maîtriser si vous visez une bonne note, ou si vous envisagez l'agrégation (même sans l'option probabilités–statistiques).

- ♥ Problèmes avancés, qui font appel à des notions d'autres cours ou de niveau recherche. Ils sortent, à proprement parler, du cadre du cours : ce sont des vignettes d'ouverture vers les mathématiques actuelles. Libre à vous de vous les approprier. N'hésitez pas à venir me voir, ou à m'écrire, si vous souhaitez en discuter.

1. CONVERGENCE EN LOI ET CONVERGENCE ÉTROITE

1.1. Rappels et révisions.

- ▢ *Exercice 1 (Mesure image).* Soit $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ une application mesurable et μ une mesure sur $\mathbb{X}$.

- (1) Vérifier que $f_{\#}\mu$ est bien une mesure.
- (2) Vérifier que la masse totale est préservée : $\mu(\mathbb{X}) = (f_{\#}\mu)(\mathbb{Y})$.
- (3) Montrer que pour tout $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable est bornée

$$\int \varphi d(f_{\#}\mu) = \int (\varphi \circ f) d\mu.$$

- ▢ *Exercice 2 (Loi).* Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ une variable aléatoire et μ sa loi. Vérifier que pour toute fonction mesurable et bornée φ on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int \varphi d\mu.$$

En déduire que l'on a bien $X_n \rightarrow X_{\infty}$ en loi si et seulement si $\mathbf{law}[X_n] \rightarrow \mathbf{law}[X_{\infty}]$ étroitement.

- ▢ *Exercice 3 (Convergence en proba vs convergence en loi).* Donner un exemple d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$, d'un espace topologique $\mathbb{X}$ et d'une suite de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{X}$ qui converge en loi mais pas en probabilités.

- ▢ *Exercice 4 (Convergence des masses de Dirac).* Soient $\mathbb{X}$ un espace métrique et $x_{\infty}, x_0, x_1, \dots$ des éléments de $\mathbb{X}$. Montrer que $x_n \rightarrow x_{\infty}$ si et seulement si $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_{x_{\infty}}$. *Bonus* : Quelles sont les conditions minimales sur la topologie de $\mathbb{X}$ pour que l'équivalence reste vraie ?

- ★ *Exercice 5 (Convergence dans les espaces discrets).* Soient $\mathbb{X}$ un espace dénombrable muni de la topologie discrète, (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{X}$ et μ_{∞} une mesure de probabilité sur $\mathbb{X}$. Montrer que (X_n) converge en loi vers μ_{∞} si et seulement si

$$\mathbf{P}[X_n = x] \rightarrow \mu_{\infty}(\{x\}), \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

- 💡 *Exercice 6 (Convergence en loi à partir des densités).* Soient (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On note f_n la densité de X_n ($n \in \mathbb{N}$) et on suppose de plus que :

- (1) il existe une fonction f_{∞} tel que $f_n \rightarrow f_{\infty}$ presque partout ;
- (2) il existe une fonction $g \in L^1(dx)$ et ≥ 0 telle que $f_n \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que f_{∞} est une densité de probabilité et que (X_n) converge en loi une variable aléatoire de densité f_{∞} .

- ★ *Exercice 7 (Convergence de variables uniformes).* Considérons les ensembles dyadiques

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 1, \dots, 2^n \right\}.$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est uniforme sur D_n . Montrer que (X_n) converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1.2. Fonction caractéristique.

- ★ *Exercice 8* (Lois discrètes). Calculer la fonction caractéristique associée aux lois de Bernoulli, Rademacher, binomiales, géométriques et Poisson. Montrer la loi des petits nombres : si $np_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\text{Binomiale}(n, p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \text{Poisson}(\lambda).$$

- 🔦 *Exercice 9* (Loi gaussienne et théorème central de la limite).

(1) Soit $X \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$. Montrer que la fonction caractéristique de X est $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$.

(2) Soit X une gaussienne standard. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$

$$\mathbf{E}[X\varphi(X)] = \mathbf{E}[\varphi'(X)].$$

(3) En déduire une équation différentielle pour la transformée de Fourier de la gaussienne standard puis la résoudre.

(4) Donner une preuve du théorème central de la limite.

- ★ *Exercice 10* (Convergence des fonctions caractéristiques et convergence en loi). Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbf{P}[\varepsilon_1 = 1] = \mathbf{P}[\varepsilon_1 = -1] = \frac{1}{2}$.

(1) Calculer la fonction caractéristique de ε_1 , en déduire une expression pour φ_n fonction de $X_n := \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{2n}$

(2) Montrer que (φ_n) converge simplement vers une fonction φ que l'on précisera.

(3) Étudier la convergence en loi de (X_n) .

- 🔦 *Exercice 11* (Convergence des fonctions caractéristiques). Soient (μ_n) et μ_∞ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\hat{\mu}_n(t) \rightarrow \hat{\mu}_\infty(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. On veut montrer que

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}(\mathbb{X})} \mu_\infty.$$

Fixons φ telle que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ et $\text{Lip}(\varphi) \leq 1$. On fixe aussi $\varepsilon > 0$ et on considère la densité gaussienne

$$\gamma_\varepsilon(x) := (\varepsilon^2 2\pi)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\varepsilon^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

(1) Montrer que

$$\|\varphi - \varphi * \gamma_\varepsilon\|_\infty \leq c\varepsilon,$$

avec $c := \mathbf{E}[|N|]$ pour N une gaussienne standard en dimension d (on ne cherchera pas particulièrement à expliciter cette constante).

(2) Montrer que pour toute mesure de probabilité μ

$$(\mu * \gamma_\varepsilon)(x) = (\varepsilon^2 2\pi)^{-d/2} \int e^{it \cdot x} \gamma_{1/\varepsilon}(t) \hat{\mu}(-t) dt.$$

(3) Utiliser les deux derniers point pour contrôler

$$\int \varphi d(\mu_n - \mu_n * \gamma_\varepsilon) + \int \varphi d(\mu_\infty - \mu_\infty * \gamma_\varepsilon) + \int \varphi d(\mu_n * \gamma_\varepsilon - \mu_\infty * \gamma_\varepsilon).$$

(4) Conclure.

1.3. Propriétés de la convergence en loi.

■ *Exercice 12* (Un contre exemple simple). La suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle étroitement ?

■ *Exercice 13* (Semi-continuité inférieure et convergence en loi). Soit h une fonction semi-continue inférieurement minorée. Montrer que l'application

$$\mathcal{P}(\mathbb{X}) \ni \mu \mapsto \int h d\mu,$$

est semi-continue inférieurement.

🔦 *Exercice 14* (Convergence des fonctions de répartition). Soient (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs réelles et μ_∞ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions de répartition

$$g_n(t) := \mathbf{P}[X_n \leq t], \quad \text{et} \quad g_\infty(t) := \int_{-\infty}^t d\mu_\infty.$$

On note T l'ensemble des points de continuité de g_∞ . L'objectif de cet exercice est d'utiliser le lemme du portemanteau pour montrer la caractérisation suivante.

Théorème 1.1. *La suite (X_n) converge en loi vers μ_∞ si et seulement si*

$$(1) \quad g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g_\infty(t), \quad \forall t \in T.$$

(1) Montrer que pour tout $t \in T$, $\mu_\infty(t) = 0$. En déduire le sens direct de l'équivalence.

Maintenant on suppose (1).

(2) Montrer que T^c est dénombrable. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une suite (ε_l) de nombres positifs avec $\varepsilon_l \rightarrow 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t + \varepsilon_l) = g_\infty(t + \varepsilon_l), \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

puis que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(t) \leq g_\infty(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(3) Avec un argument similaire montrer que

$$g_\infty(t-) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(t-).$$

(4) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}[X_n \in (a, b)] \geq \mu_\infty((a, b)).$$

(5) Conclure.

★ *Exercice 15* (Lemme de l'application continue). Soient $(\mathbb{Y}, \rho)$ un autre espace métrique complet et séparable et une fonction mesurable $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. On définit

$$(f_\# \mu)(B) := \mu(f^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}).$$

(1) Si f est continue montrer que l'application

$$\mathcal{P}(\mathbb{X}) \ni \mu \mapsto f_\# \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{Y}),$$

est continue.

(2) En déduire que si (X_n) converge en loi vers X_∞ et que f est continue, alors $(f(X_n))$ converge en loi vers $f(X_\infty)$.

♥ *Exercice 16* (Convergence des mesures empiriques).

(1) Montrer que $d_{BL}(\delta_x, \delta_y) \leq d(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{X}$.

- (2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$\mathbb{X}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}),$$

est continue.

- (3) Soient (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{X}$, indépendantes et de même loi μ . Montrer que

$$\mathbf{P} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}(\mathbb{X})} \mu \right] = 1.$$

Autrement dit, presque sûrement, la mesure empirique aléatoire $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ converge étroitement vers μ .

1.4. Application du critère de compacité.

- ★ *Exercice 17* (Nombres premiers et convergence en loi). Soit $\mathbb{X}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $p \in \mathbb{X}$, on écrit n_p pour la puissance de p dans la factorisation de n en nombre premier. Autrement dit

$$n = \prod_{p \in \mathbb{X}} p^{n_p}.$$

On considère la suite (μ_n) de mesures de probabilités sur $\mathbb{X}$ donnée par

$$\mu_n(p) = \frac{n_p}{\sum_{x \in \mathbb{X}} n_x}.$$

- (1) Montrer que (μ_n) n'est pas équitendue.
 - (2) Montrer que (μ_n) admet une sous-suite convergente.
 - (3) Montrer qu'il existe une extraction $\varphi(n)$ telle que $(\mu_{\varphi(n)})$ converge et pour tout p premier, il existe un n tel que $\varphi(n)_p > 0$.
- ★ *Exercice 18* (Suite récurrente et compacité). Soit (X_n) la suite définie par récurrence par $X_0 = a \in [0, 1]$, puis

$$X_{n+1} = U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n,$$

avec (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers 1.

- 🔥 *Exercice 19* (Lois gaussiennes). Dans cet exercice on va montrer que l'ensemble des lois gaussiennes est fermé pour la topologie de la convergence en loi.

- (1) Montrer que si $m_n \rightarrow m$ et $\sigma_n \rightarrow \sigma$, alors

$$\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}(\mathbb{R})} \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

- (2) Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m, \sigma \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbf{P}[|X| \leq |m|] \leq \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}[|X| \leq |\sigma|] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

- (3) Montrer qu'une suite (X_n) de variables aléatoires gaussiennes est équitendue si et seulement si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathbf{E}[X_n]| + \mathbf{Var}[X_n] < \infty.$$

- (4) Conclure.

2. ESPÉRANCES CONDITIONNELLES

Dans toute cette partie, X est une variable aléatoire à valeurs réelles et intégrables.

2.1. Cas général.

☐ *Exercice 20* (Calculs élémentaires). Calculer

- (1) $\mathbf{E}[X | \mathfrak{B}(\Omega)]$ et $\mathbf{E}[X | \{\emptyset, \Omega\}]$.
- (2) $\mathbf{E}[X | \sigma(\{A\})]$ pour un borélien A .
- (3) $\mathbf{E}[X | \sigma(\{A_1, \dots, A_l\})]$ pour une partition borélienne $A_1, \dots, A_l \in \mathfrak{B}$ de Ω .

★ *Exercice 21* (Conditionnement par rapport à une somme). Soit $(X_n)_n$ une suite de copies indépendantes et identiquement distribuées de X . Calculer $\mathbf{E}[X_i | X_1 + \dots + X_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

☐ *Exercice 22* (Conditionnement et indépendance). Donner un exemple de X et d'une sous-tribu $\mathfrak{F}$ tel que $\mathbf{E}[X | \mathfrak{F}] = \mathbf{E}[X] = 0$ mais X n'est pas indépendant de $\mathfrak{F}$.

🔦 *Exercice 23* (Conditionnement dyadique). On suppose que $\Omega := [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure uniforme $\mathbf{P}$. Presque tout élément $\omega \in \Omega$ admet une unique décomposition binaire ou dyadique

$$\omega = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k(\omega) 2^{-k-1}.$$

- (1) Montrer que les (ε_k) sont mesurables et que (ε_k) est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n(\omega) := 2^{-n-1} \lfloor 2^{n+1} \omega \rfloor = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k(\omega) 2^{-k-1}.$$

- (2) Pour tout $X \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}[X | X_n]$.

2.2. Cas des variables aléatoires de carré intégrable. Dans cette partie on suppose de plus que X est de carré intégrable

★ *Exercice 24* (Conditionnement et projection orthogonale). Soit une sous-tribu $\mathfrak{F}$. Montrer que $\mathbf{E}[X | \mathfrak{F}]$ est la projection orthogonale de X sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{F})$. En déduire que si Y est une variable aléatoire de carré intégrable,

$$\mathbf{E}[X \mathbf{E}[Y | \mathfrak{F}]] = \mathbf{E}[Y \mathbf{E}[X | \mathfrak{F}]].$$

🔦 *Exercice 25* (Martingale rétrograde). Soit $(\mathfrak{F}_n)$ une suite décroissante de sous-tribus. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n := \mathbf{E}[X | \mathfrak{F}_n] - \mathbf{E}[X | \mathfrak{F}_{n+1}]$.

- (1) Montrer que les variables aléatoires (Δ_n) sont deux à deux orthogonales dans L^2 .
- (2) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ converge dans L^2 .
- (3) Montrer que

$$\mathbf{E}[X | \mathfrak{F}_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mathbf{E}\left[X | \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_n\right].$$

2.3. Conditionnement discret. Dans toute cette partie $\mathbb{X}$ est un espace au plus dénombrable et on utilise les mêmes notations que celles du cours.

★ *Exercice 26* (Urnes au hasard). On dispose de n urnes. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'urne numéro i contient i boules numérotées de 1 à i . On choisit une urne au hasard de façon uniforme puis on tire une boule dans cette urne de façon également uniforme. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

- (1) Donner la loi de X .
- (2) Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, calculer $\mathbf{P}[Y = j | X = i]$. En déduire la loi de Y .
- (3) Calculer $\mathbf{E}[Y | X]$.

- 🔦 **Exercice 27** (Deux dés). Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}^2$ représentant le tirage de deux dés indépendants et équilibrés. Calculer $\mathbf{E}[X \mid \max(X, Y)]$, $\mathbf{E}[X \mid \min(X, Y)]$ et $\mathbf{E}[\min(X, Y) \mid \max(X, Y)]$.
- ★ **Exercice 28** (Conditionnement poissonnien). Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Poisson indépendantes avec $\mathbf{E}[X_n] = \lambda_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$.
- (1) Quelle est la loi de S_n ?
 - (2) Calculer $\mathbf{P}[X_k = y \mid S_n = x]$ pour tout k, n, x et $y \in \mathbb{N}$.
 - (3) Calculer $\mathbf{E}[X_1 \mid S_n]$ en fonction de n .
- 🔦 **Exercice 29** (Permutation aléatoire). Soit σ une permutation aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ avec $n \geq 2$. Pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, calculer $\mathbf{E}[\sigma(1) \mid \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(i)]$.

2.4. Loi conditionnelle.

- 📖 **Exercice 30** (Vérification du cours). Vérifier que le noyau de probabilités donné dans le cours dans le cas des variables aléatoires indépendantes correspond bien à la loi conditionnelle de Y sachant X . Même question mais dans le cas des variables aléatoires à densité.

2.5. Calculs explicites avec des noyaux.

- 📖 **Exercice 31** (Action des noyaux). Soient q un noyau markovien, φ une fonction mesurable bornée et ν une mesure. Vérifier que $Q\varphi$ est borélienne bornée et que νQ est une mesure. Si ν est de plus une probabilité, vérifier que νQ est aussi une proba.
- 📖 **Exercice 32** (Cas dénombrable). On prend $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des espaces dénombrables (finis ou infinis). On identifie une fonction $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ au vecteur colonne $(\varphi(y))_{y \in \mathbb{Y}}$ et une mesure ν au vecteur ligne $(\nu(\{x\}))_{x \in \mathbb{X}}$. Soit q un noyau de probabilité de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{Y}$ que l'on identifie à la « matrice »

$$Q(x, y) := q(x, \{y\}), \quad \forall x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}.$$

Montrer que les expressions de νQ , $Q\varphi$ et $\nu\varphi := \int \varphi d\nu$ correspondent bien au produit matriciel.

- 📖 **Exercice 33** (Exemples élémentaires). Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des espaces polonais, $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable et λ une mesure σ -finie sur $\mathbb{X}$. Calculer $Q\varphi$ et λQ quand pour tout $x \in \mathbb{X}$:
- (1) $q(x, \cdot) := \delta_{f(x)}$ pour une application borélienne $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.
 - (2) $q(x, \cdot) := k(x)\delta_x$ pour une application borélienne $k : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, q est un noyau à valeurs mesures mais pas un noyau markovien (sauf si $k = 1$).
 - (3) $q(x, \cdot) = \nu$ pour $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{Y})$.

- ★ **Exercice 34** (Convolutions sur un groupe). Soit $\mathbb{X}$ un groupe polonais. On considère la translation définie par

$$\tau_x g := xg, \quad \forall x, g \in \mathbb{X}.$$

On prend $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$.

- (1) Vérifier que

$$q(x, \cdot) := (\tau_x)_\# \mu,$$

définit bien un noyau de Markov.

- (2) Calculer $Q\varphi$ et νQ pour une fonction borélienne positive φ et une mesure σ -finie ν .
 - (3) Soit (h_i) des variables aléatoires indépendantes de même loi μ . Exprimer la loi de $h_1 \dots h_n$ en fonction de Q .
- ★ **Exercice 35** (Convolution sur $\mathbb{R}^n$). On se place dans le cadre de l'exercice précédent avec $\mathbb{X} := \mathbb{R}^n$. Dans ce cas on note $\varphi * \mu := Q\varphi$ et $\nu * \mu := \nu Q$, les *convolutions* de φ avec μ et ν avec μ respectivement.

- (1) Montrer que si $\nu = \varphi \text{Leb}$ alors $\nu * \mu = (\varphi * \mu) \text{Leb}$.
- (2) Montrer que si φ est $\mathcal{C}^p$, alors $\varphi * \mu$ est également $\mathcal{C}^p$.
- (3) Montrer que $\widehat{\varphi * \mu} = \widehat{\varphi} \widehat{\mu}$.
- (4) Montrer que pour toute ψ continue et bornée

$$\int \psi d(\varphi * \mu) = \int (\psi * \varphi) d\mu.$$

- 🔦 *Exercice 36* (Exemple gaussien 1). On considère $q(x, \cdot) := \mathcal{N}(0, x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (1) Montrer que q est bien un noyau de Markov sur $\mathbb{R}$.
 - (2) Vérifier qu'il est fellerien, mais pas fortement fellerien.
 - (3) Calculer $Q\varphi$ pour $\varphi(t) := t^p$ et $p \in \mathbb{N}$.
 - (4) Calculer νQ pour ν la mesure de Lebesgue et pour ν une loi normale $\mathcal{N}(a, b^2)$.
 - (5) Décrire explicitement la loi $q^2(x, \cdot)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 🔦 *Exercice 37* (Exemple gaussien 2). On considère $q(x, \cdot) := \mathcal{N}(x, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mêmes questions que dans l'exercice précédent, mais cette fois q est fortement fellerien.
- ★ *Exercice 38* (Calculs binomiaux). Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X \sim \text{Bin}(n, a)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0, 1[$ et que $\mathbf{law}[Y | X = x] = \text{Bin}(x, b)$ pour un certain $b \in]0, 1[$ et tout $x \in \{0, \dots, n\}$.
- (1) Montrer que $Y \sim \text{Bin}(n, ab)$.
 - (2) Calculer $\mathbf{E}[Y | X]$.
- ★ *Exercice 39* (Calculs poissoniens). Même exercice que le précédent mais cette fois $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et on doit montrer que $Y \sim \text{Poi}(b\lambda)$.
- 🔦 *Exercice 40* (Calculs dyadiques). On travaille sur $\Omega = [0, 1]$ équipé de $\mathbf{P}$ la mesure de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la tribu dyadique $\mathfrak{F}_n$ engendrée par

$$\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] : k = 0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Calculer $\mathbf{P}[\cdot | \mathfrak{F}_n]$, puis étudier la convergence quand $n \rightarrow \infty$ de $\mathbf{E}[X | \mathfrak{F}_n]$ avec X l'application identité.

- 🔦 *Exercice 41* (Noyau de Poisson). Dans $\mathbb{R}^n$, soient $\mathbb{X}$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$, et $\mathbb{Y}$ son bord topologique, c'est-à-dire la sphère de rayon r . On considère σ la mesure uniforme sur $\mathbb{Y}$ et on pose

$$q(x, dy) := r^{n-2} \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \sigma(dy), \quad \forall x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}.$$

- (1) Montrer que q définit un noyau de probabilité de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{Y}$.
- (2) Soit $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose

$$H_\varphi(x) := \begin{cases} Q\varphi(x), & \text{si } x \in \mathbb{X}; \\ \varphi(y), & \text{si } x \in \mathbb{Y}. \end{cases}$$

Montrer que H_φ est une extension harmonique de φ , au sens du laplacien, c'est-à-dire que H_φ coïncide avec φ sur le bord de $\mathbb{X}$ (évident) et que $\Delta H_\varphi = 0$ dans $\mathbb{X}$.

- (3) Comparer avec un résultat du cours sur les noyaux markoviens.

2.6. Calculs explicites d'espérances et de lois conditionnelles.

🔦 *Exercice 42* (Calculs sphériques). Soit N un vecteur gaussien standard sur $\mathbb{R}^n$. On pose $R := \|N\|$ et $\Theta := N/\|N\|$.

- (1) Montrer que R et Θ sont indépendants et que Θ est uniforme sur la sphère.
- (2) Montrer que Θ_1 suit une loi de densité

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \pi^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)_+^{\frac{n-3}{2}},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

- (3) Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Calculer la loi conditionnelle de $\langle N, a \rangle$ sachant $\|N\|$.

★ *Exercice 43* (Loi conditionnelle d'une somme i.i.d). Soit (X_i) une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et de loi commune μ . Soit également N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des (X_i) . Calculer la loi conditionnelle de $S := \sum_{i=1}^N X_i$ sachant N et en déduire une expression pour

$$\mathbf{E}[\varphi(S) \mid N],$$

pour tout $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne.

★ *Exercice 44* (Vecteurs gaussiens). On considère (X, Y, Z) un vecteur gaussien d'espérance $(1, 1, -1)$ et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- (1) Vérifier que la matrice est bien une matrice de covariance.
- (2) Calculer $\mathbf{E}[X \mid Y]$ et $\mathbf{E}[X \mid Y, Z]$.

★ *Exercice 45* (Poisson conditionné à être pair). Calculer $\mathbf{E}[Y \mid X]$ pour Y une variable aléatoire de Poisson de moyenne $\lambda > 0$ et $X := 1_{Y \in 2\mathbb{N}}$.

★ *Exercice 46* (Cas des variables aléatoires à densité). On fixe $p \in [1, \infty]$. Calculer $\mathbf{E}[Y \mid X]$ pour (X, Y) une variable aléatoire uniforme sur la boule unité ℓ^p de $\mathbb{R}^2$.

🔦 *Exercice 47* (Conditionnement sachant le cosinus). Calculer $\mathbf{E}[U \mid \cos U]$ lorsque U est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$.

3. THÉORÈME ERGODIQUE

📖 *Exercice 48* (Variables aléatoires invariantes). Montrer qu'une variable aléatoire F est invariante si et seulement si elle est $\mathbf{i}$ -mesurable.

🔥 *Exercice 49* (Rotations). On travaille sur le cercle $\Omega := \mathbb{S}_1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = [0, 1]$ muni de sa tribu borélienne $\mathfrak{B}(\Omega)$ et de la mesure de Haar (mesure de Lebesgue) $\mathbf{P}$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\theta(\omega) := \omega + \alpha \mod 1, \quad \forall \omega \in [0, 1].$$

Montrer que (Ω, θ) est un système dynamique, que $\mathbf{P}$ est toujours invariante. Montrer que $\mathbf{P}$ est l'unique mesure de probabilité invariante si et seulement si α est irrationnel. Dans ce cas, que dit le théorème de Birkhoff appliqué à la fonction $F := 1_{[0, 1/2]}$? Interpréter.

🔦 *Exercice 50* (Doublement). On travaille de nouveau sur le cercle $\mathbb{S}_1$ et on considère l'application

$$\theta(\omega) := 2\omega \mod 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{S}_1.$$

Montrer que l'on a bien un système dynamique ergodique. Montrer que pour presque tout $\omega \in [0, 1]$ la fréquence d'apparition de 0 dans l'écriture binaire de ω est $1/2$.

- ★ *Exercice 51* (On revient partout tout le temps). Soit $(\Omega, \mathbf{P}, \theta)$ un système dynamique ergodique. Soit A un borélien tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. Montrer que pour presque tout ω , l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} : \theta^n \omega \in A\},$$

est infini.

- 🔦 *Exercice 52* (Loi de Benford). On s'intéresse au premier chiffre, c'est-à-dire le chiffre le plus à gauche, dans l'écriture décimale de k^n quand n varie et que k n'est pas une puissance de 10. Pour un $x \in \mathbb{R}$, notons $a_1(x) \in \{1, \dots, 9\}$ ce premier chiffre.

- (1) Montrer que pour $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ le premier chiffre de x est i si et seulement si

$$\log_{10}(x) \bmod 1 \in [\log_{10}(i), \log_{10}(i+1)[.$$

- (2) En utilisant le résultat sur les rotations irrationnelles, montrer que

$$\frac{1}{N} |\{n \leq N : a_1(k^n) = i\}| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \log_{10}\left(\frac{i+1}{i}\right).$$

- ★ *Exercice 53* (Décalage de Bernoulli). Soit $(\mathbb{X}, \mu)$ un espace de probabilité polonais. On pose $\Omega := \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ (qui est encore polonais) et $\mathbf{P} := \mu^{\otimes \mathbb{N}}$. On considère la transformation θ donnée par

$$(\theta\omega)_n := x_{n+1}, \quad \forall \omega = (x_0, x_1, \dots) \in \Omega, n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Montrer que c'est un système dynamique ergodique.
 (2) Soient (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ , $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in L^1(\mu^{\otimes(m+1)})$. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X_k, \dots, X_{k+m}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{E}[\varphi(X_0, \dots, X_m)].$$

- ▢ *Exercice 54* (Point fixe et mesure ergodique). On considère un système dynamique (Ω, θ) . Montrer que $x \in \Omega$ est un point fixe de θ si et seulement si δ_x est une mesure ergodique.

4. CHAÎNES DE MARKOV

- ▢ *Exercice 55* (Transformations de Rademacher). Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $\{-1, 1\}$. Les suites suivantes sont-elles des chaînes de Markov ? Avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- (1) $S_n := \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$.
- (2) $M_n := \max\{S_1, \dots, S_n\}$.
- (3) $Y_n = M_n - S_n$.
- (4) $V_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$.

4.1. L'espace canonique. On pose $\Omega := \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ et $X_n(\omega) := \omega_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$. On se donne aussi un noyau Markovien q sur $\mathbb{X}$ et on utilise la notation du cours.

- ▢ *Exercice 56* (La tribu cylindrique). Vérifier que la tribu cylindrique sur Ω est la tribu engendrée par (X_n) .
- ▢ *Exercice 57* (Reformulation de la propriété de temps d'arrêt). Montrer que τ est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{\tau \leq k\} \in \mathfrak{F}_k$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\{\tau > k\} \in \mathfrak{F}_k$.
- ▢ *Exercice 58* (Un contre-exemple important). Donner un exemple de variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{\tau \geq k\} \in \mathfrak{F}_k$, mais τ n'est pas un temps d'arrêt.
- ▢ *Exercice 59* (Transformations des temps d'arrêt). Montrer que le minimum, le maximum ou la somme de deux temps d'arrêt est encore un temps d'arrêt.
- ▢ *Exercice 60* (Processus à un temps d'arrêt). Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que $X_\tau 1_{\{\tau < \infty\}}$ est $\mathfrak{F}_\tau$ -mesurable.

4.2. Fonctions harmoniques et mesures stationnaires.

- ★ *Exercice 61* (La ruine du joueur). Un parieur gagne 1 euro avec probabilité $p \in (0, 1)$ et perd 1 euro avec probabilité $q := 1 - p$. Il s'arrête quand il est ruiné ou quand il a atteint un certain seuil b .

- (1) Représenter ce problème comme une chaîne de Markov et dessiner le graphe d'incidence.
- (2) En notant $x \in \{1, \dots, b-1\}$ la somme initiale dont dispose le joueur, montrer que la probabilité de ruine $r(x)$ satisfait

$$r(x) := \begin{cases} 1 - \frac{x}{b}, & \text{si } p = q = 1/2; \\ \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-x}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ★ *Exercice 62* (Un jeu idiot). On joue à pile ou face jusqu'à obtenir exactement la séquence *PFPP*. Quel est la durée moyenne d'une partie ?

- 🔦 *Exercice 63* (Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$). On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$Q(n, (n-1)_+) := \frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad Q(n, n+1) := \frac{1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Calculer la mesure stationnaire et montrer que la dynamique est réversible.
- (2) Calculer $\mathbf{E}_n[\tau_0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 🔦 *Exercice 64* (Marche aléatoire biaisée). Soit $p \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$. On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition

$$Q(k, k+1) := p, \quad \text{et} \quad Q(k, k-1) := 1-p, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- (1) Montrer que la mesure de comptage est stationnaire. Est-elle réversible ?
- (2) Montrer que la mesure $\mu(k) := \left(\frac{p}{q}\right)^k$ est stationnaire. Est-elle réversible ?

- 🔦 *Exercice 65* (Fonctions harmoniques de la marche aléatoire simple). On considère la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.

- (1) Donner la matrice de transition et dessiner le graphe d'incidence.
- (2) Montrer qu'une fonction harmonique est affine.
- (3) Caractériser toutes les mesures stationnaires.

- 🔦 *Exercice 66* (Marche aléatoire continue). On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ de loi de sauts $K := \text{Unif}([-1, 1])$. Soient h une fonction harmonique et bornée et ν une mesure stationnaire.

- (1) Calculer $\mathcal{F}K$, la transformée de Fourier de K .
- (2) Soit T une distribution tempérée solution de l'équation $K * T = T$. Montrer que $\mathcal{F}T$ est une distribution d'ordre 2 supportée en 0, puis donner la forme explicite de T .
- (3) Que peut-on en déduire pour h et ν ?

4.3. Espace d'états fini ou dénombrable.

- 📖 *Exercice 67* (Mesure uniforme et matrices bi-stochastiques). Démontrer qu'une matrice bi-stochastique admet toujours la mesure uniforme comme mesure stationnaire.

- ★ *Exercice 68* (Calculs explicites). Calculer toutes les mesures de probabilité stationnaires pour les matrices stochastiques

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les dynamiques sont-elles réversibles ?

- ★ *Exercice 69* (Une condition à l'apériodicité). Soit Q une matrice stochastique irréductible telle qu'il existe $x \in \mathbb{X}$ avec $Q(x, x) > 0$. Montrer que Q est apériodique.
- ★ *Exercice 70* (Toutes les chaînes de Markov à deux états). Soit (X_n) une chaîne de Markov sur l'espace à deux états $\mathbb{X} := \{1, 2\}$.

- (1) Montrer que la matrice de transition est

$$Q := \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},$$

pour $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Que se passe-t-il quand $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ ou quand $(\alpha, \beta) = (1, 1)$? Pour la suite, on exclut ces deux.

- (2) Montrer que

$$Q^n = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)^n}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

- (3) Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Montrer que

$$(\mu Q^n)(1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + (1 - \alpha - \beta)^n \left(\mu(1) - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right).$$

- (4) En déduire que sous $\mathbf{P}^\mu$, (X_n) converge en li vers une mesure de probabilité m , indépendante de μ , que l'on précisera.
- (5) Montrer que $mQ = m$, interpréter cette équation.
- (6) Calculer le potentiel de la chaîne et classer ses états.
- (7) Avec $S_n := X_1 + \dots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\mathbf{E}^m[S_n] = \frac{n\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{et} \quad \mathbf{Var}^m[S_n] \leq Cn.$$

- (8) En déduire que sous $\mathbf{P}^m$, puis sous $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_1$, $(S_n/n)_n$ satisfait une loi des grands nombres.

- 🔴 *Exercice 71* (Marche aléatoire sur un groupe). Soit G un groupe dénombrable et $\mu \in \mathcal{P}(G)$. On considère la marche aléatoire (à gauche) de loi de sauts μ .

- (1) Montrer que la mesure de comptage est une mesure stationnaire.
- (2) Montrer que la chaîne est irréductible si et seulement si le semi-groupe engendré par $\{g \in G : \mu(g) > 0\}$, coïncide avec G .

- (3) Montrer que la chaîne est réversible si et seulement si $\mu(g) = \mu(g^{-1})$ pour tout $g \in G$.

- ★ *Exercice 72* (Urne d'Ehrenfest). On étudie le modèle de physique statistique suivant $2N$ particules ($N \in \mathbb{N}^*$) se trouvent dans une boîte séparée en deux parties A et B . À chaque unité de temps, on prend une particule uniformément au hasard et on la change de compartiment. On écrit (X_n) pour le nombre de particules dans A au temps $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, donner sa matrice de transition et dessiner son graphe d'incidence.

- (2) Montrer que la chaîne est irréductible et récurrente.
- (3) Est-elle périodique ?
- (4) Montrer que la loi binomiale $\text{Bin}(2N, \frac{1}{2})$ est stationnaire.
- (5) Calculer l'espérance du temps de retour en $2N$.

🔦 **Exercice 73** (Vitesse de convergence). On travaille sur un espace fini $\mathbb{X}$. On se donne une matrice stochastique irréductible et apériodique. On veut montrer qu'il existe $\kappa \in (0, 1)$ tel que

$$\|\pi - \mu Q\|_{\ell^1} \leq \kappa^n \|\pi - \mu\|_{\ell^1}, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X}),$$

où π est l'unique mesure de probabilité stationnaire donnée par le théorème de Perron–Frobenius. On suppose d'abord que les entrées de Q sont toutes strictement positives.

- (1) Montrer que

$$\delta := \sup\{q(x, A) - q(x, A^C) : x \in \mathbb{X}, A \subsetneq \mathbb{X}\} \in (0, 1).$$

- (2) Montrer que $\mathbb{X}_+ := \{y \in \mathbb{X} : (\pi - \mu)Q(y) \geq 0\}$ est non vide et pareillement pour $\mathbb{X}_-$ (si $\mu \neq \pi$).
- (3) Montrer que

$$\|(\pi - \mu)Q\|_{\ell^1} = \sum_{x \in \mathbb{X}} (\pi - \mu)(x) \left(\sum_{y \in \mathbb{X}_+} Q(x, y) - \sum_{y \in \mathbb{X}_-} Q(x, y) \right),$$

et conclure dans ce cas.

- (4) Montrer qu'une matrice stochastique Q est apériodique si et seulement si Q^n est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe n_0 tel que Q^{n_0} est à entrées strictement positives.
- (5) Conclure dans le cas général.

🔦 **Exercice 74** (Algorithme de Metropolis–Hastings). Soit $\mathbb{X}$ un espace au plus dénombrable et $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. On se donne un noyau markovien K sur $\mathbb{X}$, dit *noyau de proposition*, irréductible, et tel que $K(x, y) > 0 \iff K(y, x) > 0$ pour tous $x \neq y$. Pour $x \neq y$ avec $K(x, y) > 0$, on pose

$$a(x, y) := \min\left(1, \frac{\pi(y)K(y, x)}{\pi(x)K(x, y)}\right),$$

et $a(x, y) := 0$ si $K(x, y) = 0$. On définit ensuite

$$Q(x, y) := K(x, y) a(x, y), \quad \forall y \neq x, \quad Q(x, x) := 1 - \sum_{y \neq x} K(x, y) a(x, y).$$

- (1) Vérifier que Q est bien une matrice stochastique sur $\mathbb{X}$.
- (2) Montrer l'identité, pour tous $x \neq y$,

$$\pi(x)K(x, y) a(x, y) = \min(\pi(x)K(x, y), \pi(y)K(y, x)),$$

et en déduire que Q est réversible par rapport à π :

$$\pi(x)Q(x, y) = \pi(y)Q(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

- (3) En déduire, sans calcul supplémentaire, que π est une mesure stationnaire pour Q .
- (4) Montrer que Q est irréductible.
- (5) On suppose qu'il existe $x_0 \neq y_0$ tels que $K(x_0, y_0) > 0$ et

$$\pi(y_0)K(y_0, x_0) < \pi(x_0)K(x_0, y_0)$$

(autrement dit, un mouvement de x_0 vers y_0 est parfois refusé). Montrer que $Q(x_0, x_0) > 0$, et en déduire, à l'aide de l'exercice *Une condition à l'apériodicité*, que Q est apériodique.

- (6) *Application.* On prend $\mathbb{X} = \{0, \dots, N\}$, K la marche aléatoire simple réfléchie sur $\mathbb{X}$ (c'est-à-dire $K(x, x \pm 1) = \frac{1}{2}$, avec réflexion aux bords 0 et N), et $\pi(x) \propto w(x)$ pour des poids $w(0), \dots, w(N) > 0$ donnés. Écrire explicitement $Q(x, x+1)$ et $Q(x, x-1)$ en fonction des $w(x)$.
- (7) Dans le cas particulier $w(x) = \binom{N}{x}$ (de sorte que π est la loi binomiale $\text{Bin}(N, 1/2)$), donner une expression simple de $a(x, x+1)$ et $a(x, x-1)$.

🔴 *Exercice 75 (Convergence de Césaro dans le cas périodique).* On travaille sur un espace d'états $\mathbb{X}$ fini, muni d'une matrice de transition Q irréductible de période $d \geq 2$, et on note π son unique mesure de probabilité stationnaire. On sait que, pour $\mu \neq \pi$, la suite (μQ^n) ne converge en général pas vers π : elle peut par exemple osciller indéfiniment (voir la question (6)). Le but de cet exercice est de montrer que la convergence a néanmoins toujours lieu au sens de Césaro :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu Q^k)(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y), \quad \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), \forall y \in \mathbb{X}.$$

On fixe un état de référence $x_0 \in \mathbb{X}$.

- (1) Sous $\mathbf{P}_{x_0}$, on note $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots$ les instants successifs de visite à x_0 (en particulier $\sigma_1 = \tau_{x_0}$). Justifier, à l'aide de la propriété de Markov forte, que les variables aléatoires $(\sigma_j - \sigma_{j-1})_{j \geq 1}$ sont indépendantes, de même loi que τ_{x_0} sous $\mathbf{P}_{x_0}$, et que $m := \mathbf{E}_{x_0}[\tau_{x_0}] < \infty$.
- (2) Pour $y \in \mathbb{X}$, on pose

$$Z_j := \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j-1} \mathbf{1}_{\{y\}}(X_k), \quad \forall j \geq 1,$$

le nombre de visites à y pendant la j -ième excursion hors de x_0 . Justifier que les $(Z_j)_{j \geq 1}$ sont indépendantes et de même loi, et que

$$\mathbf{E}_{x_0}[Z_1] = \nu(y), \quad \text{où} \quad \nu(y) := \mathbf{E}_{x_0} \left[\sum_{k=0}^{\tau_{x_0}-1} \mathbf{1}_{\{y\}}(X_k) \right].$$

- (3) On rappelle (formule des cycles, vue en cours) que $\pi = \nu/m$. En appliquant la loi des grands nombres aux suites i.i.d. $(\sigma_j - \sigma_{j-1})_j$ et $(Z_j)_j$, montrer que, $\mathbf{P}_{x_0}$ -presque sûrement,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{y\}}(X_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y).$$

- (4) Soit maintenant $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ quelconque. Justifier que τ_{x_0} est fini $\mathbf{P}_\mu$ -presque sûrement, puis, à l'aide de la propriété de Markov forte appliquée en τ_{x_0} , que le résultat de la question (3) reste vrai sous $\mathbf{P}_\mu$.
- (5) En déduire, par convergence dominée, que pour tout $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ et tout $y \in \mathbb{X}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu Q^k)(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y).$$

- (6) *Application.* On reprend la chaîne à deux états $\mathbb{X} = \{1, 2\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

déjà rencontrée dans la feuille, avec $\alpha = \beta = 1$. Vérifier que Q est irréductible de période 2, calculer μQ^n explicitement pour $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$, et constater que (μQ^n) ne converge pas dès que $\mu \neq \pi := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Vérifier en revanche que la moyenne de Césaro converge bien vers π .

- (7) *Bonus.* Soit $\tilde{Q} := \frac{1}{2}(I + Q)$ la chaîne paresseuse associée à Q . Montrer que $\tilde{Q}$ est irréductible, apériodique, et de même mesure stationnaire π . En déduire, à l'aide de l'exercice sur la vitesse de convergence, que $\mu \tilde{Q}^n \rightarrow \pi$ pour tout μ . Ce résultat est-il équivalent à celui de la question (5)? Pourquoi la chaîne paresseuse ne dispense-t-elle pas entièrement de l'argument précédent?

4.4. Modélisation.

- ★ *Exercice 76* (Les parapluies de Rennes). Je possède $k \in \mathbb{N}^*$ parapluies que je stocke entre chez moi et le labo. Quand je pars d'un endroit pour aller à l'autre :
 - (1) s'il ne pleut pas, je ne touche pas au parapluie ;
 - (2) s'il pleut et qu'il y a un parapluie, je prends un parapluie avec moi (et j'évite la pluie) ;
 - (3) s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, je prends la pluie.
 Sachant qu'il y a une probabilité $p \in (0, 1)$ de pluie à Rennes (tous les jours indépendamment) quelle est la probabilité que je sois trempé? Combien de fois cela arrive-t-il en moyenne?
- ★ *Exercice 77* (Ampoules). J'ai des ampoules qui ont une durée de vie (en nombre de jours) aléatoire, indépendante et de même loi. En notant Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui représente cette durée de vie, on suppose que $m := \mathbf{E}[Y] < \infty$ et que $\mathbf{P}[Y = 1] > 0$. Pour n grand, quelle est la probabilité de devoir changer l'ampoule le n -ième jour?
- ★ *Exercice 78* (Lectures hasardeuses). Une étagère contient $N \in \mathbb{N}$ livres numérotés de 1 à N rangés dans cet ordre. Chaque jour un étudiant se rend dans la bibliothèque prend un livre uniformément au hasard sur cette étagère, le consulte et le replace complètement à gauche de tous les autres. Personne d'autre n'utilise cette étagère. Montrer que l'arrangement des livres converge vers une distribution que l'on précisera.
- ★ *Exercice 79* (Le cavalier sans tête). Un cavalier se déplace au hasard sur un échiquier en choisissant uniformément au hasard tous les coups. On admet qu'avec ce procédé il est possible pour le cavalier de visiter toutes les cases (vous pouvez aussi le vérifier avec un échiquier). En moyenne, combien faut-il de temps au cavalier pour revenir sur sa case de départ?
- ★ *Exercice 80* (Grenouille et nénuphars). Une grenouille saute entre $k \in \mathbb{N}^*$ nénuphars. À chaque saut, elle choisit les $k - 1$ autres nénuphars au hasard avec la même probabilité. Quelle est la probabilité qu'après $n \in \mathbb{N}^*$ sauts, la grenouille soit retournée sur le nénuphar de départ?
- ★ *Exercice 81* (Qui veut gagner?). Un jeu télévisé reçoit des candidats successivement qui doivent avancer sur des niveaux numérotés par $n \in \mathbb{N}$. Les candidats commencent au niveau 0. À chaque niveau on pose une question au candidat, s'il répond correctement il avance au niveau suivant. Un candidat gagne s'il atteint le niveau $N \in \mathbb{N}^*$. S'il se trompe, il est éliminé et on passe au candidat suivant (qui commence au niveau 0). On suppose que la probabilité qu'un candidat sache répondre à une question de niveau $n \in \mathbb{N}$ est donnée par p_n . En moyenne, combien faut-il de candidats avant d'avoir un vainqueur?
- ★ *Exercice 82* (Jeu de dé). On lance un dé de manière répétée et on additionne les résultats. Après un grand nombre de lancers, quelle est la probabilité que la somme soit un multiple de 13?
- ★ *Exercice 83* (Groupe cyclique). On considère la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. On arrête la marche quand tous les éléments de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ont été visités et on note U le dernier nombre visité par la marche. Calculer la loi de U sous $\mathbf{P}_0$.
- ♥ *Exercice 84* (Mélange de carte et phénomène de cutoff). On souhaite mélanger un jeu de $n \in \mathbb{N}^*$ carte. On représente la position des cartes dans le paquet par une permutation. À chaque étape du mélange on tire une carte uniformément au hasard et on la place au-dessus du paquet.

- (1) Décrire ce modèle comme une chaîne de Markov (X_k) à valeurs dans $\mathfrak{S}_n$ et donner la matrice de transition Q .
- (2) Montrer que π_n la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ est l'unique mesure de probabilité stationnaire et que, à n fixé,

$$\|\mu Q^k - \pi_n\|_{\ell^1} \rightarrow 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n).$$

- (3) Écrivons A_k pour l'ensemble des cartes qui ont été placées au moins une fois en haut du paquet entre 0 et $k \in \mathbb{N}$ et

$$T_i := \min\{k \in \mathbb{N} : |A_k| \geq i\}.$$

Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $j \in \mathbb{N}^*$ fixés

$$\mathbf{P}\left[(1 - \varepsilon) \leq \frac{T_{n-j}}{n \log n} \leq (1 + \varepsilon)\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- (4) Dédire que pour $k = (1 - \varepsilon)n \log n$

$$\frac{1}{2} \|\mu_n Q_n^k - \pi_n\|_{\ell^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \forall \mu_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n).$$

- (5) Montrer qu'il existe un couplage de (X_k) avec $(\tilde{X}_k)$ la chaîne stationnaire, c'est-à-dire commencée en π_n , tel que, pour $k = (1 + \varepsilon)n \log n$,

$$\mathbf{P}[X_k = \tilde{X}_k] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

et déduire que

$$\|\mu_n Q_n^k - \pi_n\|_{\ell^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \mu_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n).$$

- 🔴 *Exercice 85 (Loin de 1).* On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition $Q(0, 1) := 1$ puis pour $x \in \mathbb{N}^*$

$$Q(x, x-1) := \frac{x^2}{x^2 + (x+1)^2}, \quad \text{et} \quad Q(x, x+1) := \frac{(x+1)^2}{x^2 + (x+1)^2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}_0[X_n \geq 1] \geq \frac{6}{\pi^2}.$$

- 🔴 *Exercice 86 (Suite de Fibonacci aléatoire).* On définit une suite de nombres entiers de la manière suivante $F_0 = 0, F_1 = 1$ puis

$$F_{n+1} = (F_n + F_{n-1})1_{\varepsilon_{n+1}=0} + (F_n - F_{n-1})1_{\varepsilon_{n+1}=1},$$

où les (ε_n) sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $\frac{1}{2}$.

- (1) Montrer que (F_n) n'est pas une chaîne de Markov mais que $X_n := (F_{n-1}, F_n)$ l'est. Quelle est son noyau de transition ?

- (2) Montrer que $\mathbf{P}_{(1,2)}[\tau_{(1,1)} < \infty] = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- (3) Dédire que la chaîne est transiente.

- 🔴 *Exercice 87 (PageRank).* On modélise le Web par un graphe orienté fini $(\mathbb{X}, E) : \mathbb{X}$ est l'ensemble des pages, et $(x, y) \in E$ si la page x contient un lien vers la page y . On suppose que chaque page possède au moins un lien sortant, et on note

$$d^+(x) := |\{y \in \mathbb{X} : (x, y) \in E\}| \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

le nombre de liens sortants de x . On considère le noyau

$$K(x, y) := \frac{\mathbf{1}_{(x,y) \in E}}{d^+(x)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{X},$$

qui modélise un internaute suivant les liens uniformément au hasard. Ce noyau n'est en général ni irréductible ni apériodique : pages sans lien entrant, composantes non reliées, cycles de longueur paire, etc. On fixe un paramètre d'amortissement $c \in (0, 1)$ (en pratique $c = 0,85$) et on pose

$$Q(x, y) := c K(x, y) + (1 - c) \frac{1}{|\mathbb{X}|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

On interprète Q ainsi : avec probabilité c l'internaute suit un lien sortant choisi uniformément au hasard, et avec probabilité $1 - c$ il se téléporte vers une page choisie uniformément parmi toutes les pages.

- (1) Vérifier que Q est une matrice stochastique, et que $Q(x, y) > 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{X}$.
- (2) En déduire, à l'aide de l'exercice *Une condition à l'apériodicité*, que Q est irréductible et apériodique.
- (3) En déduire, par le théorème de Perron–Frobenius, qu'il existe une unique mesure de probabilité π stationnaire pour Q , et que $\mu Q^n \rightarrow \pi$ pour toute $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Par définition, $\pi(x)$ est le *PageRank* de la page x .
- (4) Montrer que π est l'unique solution dans $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ de

$$\pi(y) = c \sum_{x : (x, y) \in E} \frac{\pi(x)}{d^+(x)} + (1 - c) \frac{1}{|\mathbb{X}|}, \quad \forall y \in \mathbb{X}.$$

Interpréter : l'importance d'une page est proportionnelle à celle des pages qui pointent vers elle, chacune divisée par son nombre de liens sortants.

- (5) On considère le graphe à 4 pages $\{1, 2, 3, 4\}$ avec les liens $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ (la page 4 ne reçoit aucun lien). Avec $c = 0,85$, calculer π (en résolvant le système linéaire de la question (4), ou par itération), et vérifier que $\pi(4) = (1 - c)/4$ exactement. Commenter : que représente cette valeur, et pourquoi est-elle indépendante de la structure du reste du graphe?
- (6) Expliquer pourquoi, dans la limite $c \rightarrow 1$, la borne de contraction κ de l'exercice 73 sur la vitesse de convergence se dégrade ($\kappa \rightarrow 1$), alors que Q se rapproche du noyau « réaliste » K . Quel compromis cela illustre-t-il ?

4.5. Modèles de population.

- ★ *Exercice 88* (Galton–Watson). On se donne une loi $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dite *loi de reproduction*, et une famille $(\xi_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de loi p . On interprète $\xi_{n,i}$ comme le nombre d'enfants du i -ième individu de la génération $n - 1$. La taille de la population évolue selon

$$Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n+1,i}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec la convention $\sum_{i=1}^0 := 0$. On note

$$m := \sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k \in [0, \infty],$$

le nombre moyen d'enfants par individu. Dans tout l'exercice on suppose

$$p_0 > 0, \quad \text{et} \quad p_0 + p_1 < 1,$$

c'est-à-dire qu'un individu peut ne pas avoir de descendant, et qu'il peut en avoir au moins deux.

- (1) Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ et que sa matrice de transition est donnée par

$$Q(x, \cdot) = p^{*x}, \quad \forall x \in \mathbb{N},$$

où p^{*x} désigne la x -ième puissance de convolution de p (avec $p^{*0} := \delta_0$).

- (2) Montrer que 0 est un état absorbant, donc récurrent, et que tout $x \in \mathbb{N}^*$ est transient.
- (3) En déduire que $G(x, y) < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{N}^*$, puis que, presque sûrement,

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{ou} \quad Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Autrement dit, la population s'éteint ou explose : il n'y a pas de régime intermédiaire.

- (4) On pose

$$h(x) := \mathbf{P}_x[\tau_0 < \infty], \quad \forall x \in \mathbb{N},$$

la probabilité d'extinction partant de x individus. Justifier que $h(x) = h(1)^x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$. *Indication* : Les descendances des x individus initiaux sont indépendantes et de même loi.

- (5) On note $q := h(1)$ et

$$f(s) := \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k s^k, \quad \forall s \in [0, 1].$$

En utilisant que h est harmonique sur $\mathbb{N}^*$, montrer que $q = f(q)$.

- (6) En utilisant la caractérisation du cours des probabilités d'atteinte comme plus petite solution positive du problème de Dirichlet, montrer que q est le plus petit point fixe de f dans $[0, 1]$.
- (7) Montrer que f est convexe et strictement croissante sur $[0, 1]$, que $f(1) = 1$, et que la dérivée à gauche de f en 1 vaut m . En déduire que

$$q = 1 \iff m \leq 1.$$

On parle de régime *sous-critique* si $m < 1$, *critique* si $m = 1$ et *sur-critique* si $m > 1$.

- (8) Dans le régime sur-critique, calculer $\mathbf{P}_x \left[Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \right]$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.
- (9) Montrer que δ_0 est l'unique mesure de probabilité stationnaire, et ce dans les trois régimes.
- (10) Montrer que $\mathbf{E}[Z_n] = m^n$ sous $\mathbf{P}_1$. Dans le régime critique, on a donc $\mathbf{E}[Z_n] = 1$ pour tout n , alors que $Z_n \rightarrow 0$ presque sûrement. Commenter.

★ *Exercice 89 (Wright–Fisher).* Une population de taille constante $N \in \mathbb{N}^*$ porte deux allèles, notés A et a . Si la génération n compte X_n individus de type A , alors chacun des N individus de la génération $n + 1$ choisit son parent uniformément au hasard dans la génération n , indépendamment des autres, et hérite de son type.

- (1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{X} := \{0, \dots, N\}$ de matrice de transition

$$Q(x, \cdot) = \text{Bin}\left(N, \frac{x}{N}\right), \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

- (2) Dessiner le graphe d'incidence pour $N = 2$. Quels sont les états absorbants? La chaîne est-elle irréductible?
- (3) Montrer que $\{1, \dots, N - 1\}$ est une classe transiente, puis que $\tau_{\{0, N\}} < \infty$ presque sûrement sous $\mathbf{P}_x$, pour tout $x \in \mathbb{X}$. On dit que la population se *fixe* en temps fini.
- (4) Montrer que $x \mapsto x/N$ est harmonique et en déduire que

$$\mathbf{P}_x[\tau_N < \tau_0] = \frac{x}{N}, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Comparer avec l'exercice sur la ruine du joueur.

- (5) Déterminer toutes les mesures de probabilité stationnaires. Commenter le lien avec la question (2).

- (6) On ajoute maintenant des *mutations* : après le tirage de son parent, et indépendamment de tout le reste, chaque individu de la nouvelle génération change de type, de A vers a avec probabilité $u \in (0, 1)$ et de a vers A avec probabilité $v \in (0, 1)$.

- (a) Montrer que la nouvelle chaîne a pour matrice de transition

$$Q_{u,v}(x, \cdot) = \text{Bin}\left(N, \psi\left(\frac{x}{N}\right)\right), \quad \text{avec } \psi(t) := t(1-u) + (1-t)v.$$

- (b) Montrer que $Q_{u,v}$ est à entrées strictement positives, donc irréductible et apériodique.

- (c) En déduire qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire π et que $\mu Q_{u,v}^n \rightarrow \pi$ pour toute $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Que devient la conclusion de la question (3)?

🔴 **Exercice 90** (Populations : chaînes de naissance et de mort). On modélise la taille d'une population par une chaîne de Markov (X_n) sur $\mathbb{N}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$Q(x, x+1) := p_x, \quad Q(x, x-1) := q_x, \quad Q(x, x) := 1 - p_x - q_x,$$

où $q_0 := 0$ et où l'on suppose

$$p_x > 0 \ (x \in \mathbb{N}), \quad q_x > 0 \ (x \in \mathbb{N}^*), \quad p_x + q_x \leq 1 \ (x \in \mathbb{N}).$$

À chaque unité de temps, la population gagne donc un individu, en perd un, ou reste stable.

- (1) Montrer que la chaîne est irréductible.
(2) Montrer que toute mesure stationnaire ν satisfait la condition

$$\nu(x)p_x = \nu(x+1)q_{x+1}, \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Indication : Poser $F(x) := \nu(x)p_x - \nu(x+1)q_{x+1}$, montrer que F est constante, puis nulle en regardant l'équation de stationnarité en 0.

- (3) En déduire que la chaîne est réversible et qu'il existe une unique mesure stationnaire à constante multiplicative près, donnée par

$$\mu(0) := 1, \quad \mu(x) := \prod_{i=1}^x \frac{p_{i-1}}{q_i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

- (4) Montrer que la chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{x \in \mathbb{N}} \mu(x) < \infty,$$

et préciser dans ce cas l'unique mesure de probabilité stationnaire ainsi que $\mathbf{E}_0[\tau_0]$.

- (5) On pose $\Delta_0 := 1$ et $\Delta_k := \prod_{i=1}^k \frac{q_i}{p_i}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis

$$h(x) := \sum_{k=0}^{x-1} \Delta_k, \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Vérifier que h est harmonique sur $\mathbb{N}^*$ et que $h(0) = 0$.

- (6) Pour $0 < x < N$, calculer $\mathbf{P}_x[\tau_N < \tau_0]$ en fonction de h . En faisant tendre N vers l'infini, montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k = \infty.$$

- (7) *Application 1 : population sans régulation.* On prend $p_x := p$ et $q_x := 1 - p$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $p_0 := p$, avec $p \in (0, 1)$. Discuter la récurrence, la récurrence positive et la mesure stationnaire en fonction de p . Retrouver ainsi un exercice précédent de la feuille.

(8) *Application 2 : immigration et mortalité individuelle.* Soit $\lambda > 0$. On prend

$$p_x := \frac{\lambda}{\lambda + x + 1} \quad (x \in \mathbb{N}), \quad \text{et} \quad q_x := \frac{x}{\lambda + x} \quad (x \in \mathbb{N}^*).$$

Vérifier que $p_x + q_x \leq 1$, puis montrer que la chaîne est récurrente positive et que son unique mesure de probabilité stationnaire est la loi de Poisson de paramètre λ . Interpréter : la population reçoit des arrivées à taux constant, et chaque individu présent meurt indépendamment des autres.

4.6. h -transformation.

- ★ *Exercice 91* (Loi des temps de retour). On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de loi de sauts $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ ($p \in (0, 1)$). Calculer la loi de τ_0 sous $\mathbf{P}_x$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. *Indication* : Obtenir une équation pour la fonction génératrice $\mathbf{E}_x[s^{\tau_0}]$ en utilisant la propriété de Markov.
- ★ *Exercice 92* (Transformation de Doob). On considère une matrice stochastique irréductible et transiente Q sur un espace dénombrable $\mathbb{X}$. On fixe $x_0 \neq z \in \mathbb{X}$ et on pose

$$h(x) := \mathbf{P}_x[\tau_z = \infty].$$

On pose

$$\mathbb{X}_+ := \{x \in \mathbb{X} : h(x) > 0\}.$$

On définit la h -transformée de Q par

$$Q^h(x, y) := \frac{h(y)}{h(x)} Q(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}_+.$$

- (1) Vérifier que h est harmonique sur $\mathbb{X}_+$.
 - (2) Vérifier que Q^h est une matrice stochastique sur $\mathbb{X}_+$.
 - (3) Vérifier que sous $\mathbf{P}_{x_0}[\cdot \mid \tau_z = +\infty]$, (X_n) est une chaîne de Markov dont la matrice stochastique est donnée par Q^h .
- ♥ *Exercice 93* (Marche aléatoire positive). On considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et on veut la conditionner à ne jamais atteindre 0.

- (1) Justifier que $\mathbf{P}_1[\tau_0 = \infty] = 0$ et donc on ne peut pas directement appliquer la transformation de l'exercice précédent.
- (2) On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \in \{1, \dots, N\}$ calculer

$$h_N(x) := \mathbf{P}_x[\tau_N < \tau_0].$$

- (3) Vérifier que l'on peut faire la transformation de Doob avec h_N et calculer Q^{h_N} .
- (4) Calculer la limite quand $N \rightarrow \infty$ de la transformée précédente et montrer que cette limite s'interprète aussi comme une h -transformation pour une fonction que l'on explicitera.
- (5) Justifier que la matrice stochastique précédente est associée à la marche aléatoire conditionnée à éviter 0.

4.7. Espaces d'états non dénombrables.

- *Exercice 94* (Un contre-exemple simple). Soit le noyau markovien sur $[0, 1]$

$$q(x, \cdot) := \begin{cases} \delta_{x/2}, & \text{si } x > 0; \\ \delta_1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la dynamique n'admet pas de mesure de probabilité stationnaire. Pourquoi est-ce consistant avec le théorème de Krylov–Bogolioubov?

- 🔦 **Exercice 95** (Chaîne de Markov et EDO stochastique). On se fixe une suite (ξ_n) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et de second moment fini, c'est-à-dire

$$\mathbf{E} \left[\sup_{t \in [0,1]} |\xi_1(t)|^2 \right] < \infty.$$

On pose $X_0 = x \in \mathbb{R}$ puis X_{n+1} est la solution au temps 1 de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{u} = u - u^3 + \xi_{n+1}, \\ u(0) = X_n. \end{cases}$$

- (1) Vérifier que l'on a bien une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à écrire le noyau de transition).
 - (2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\mathbf{E}[X_{n+1}^2 | X_n] \leq C + \frac{1}{2}X_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (3) En déduire que la chaîne admet une mesure de probabilité stationnaire.
- ★ **Exercice 96** (Processus auto-regressif). Soient (G_n) des variables gaussiennes standard indépendantes, $\alpha \in \mathbb{R}$ et le système récurrent

$$X_{n+1} = \alpha X_n + G_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, préciser l'espace d'états et le noyau de transition.
 - (2) Dans le cas $|\alpha| < 1$ montrer que $x \mapsto |x|^p$ est une fonction de Lyapunov pour tout $p \geq 1$, puis qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire.
 - (3) Dans le cas $|\alpha| \geq 1$, montrer que les fonctions du dessus ne sont pas des fonctions de Lyapunov, puis qu'il n'y a pas de mesure de probabilité stationnaire.
 - (4) Dans le cas où $\alpha \in \{\pm 1\}$, montrer que la mesure de Lebesgue est une mesure stationnaire.
- ★ **Exercice 97** (Calcul d'une fonction de Lyapunov). Soient une suite (U_n) de variables indépendantes et uniformes sur $[1, 2]$ et (X_n) la chaîne de Markov définie par

$$X_{n+1} = \sqrt{X_n U_{n+1}}.$$

- (1) Montrer que la chaîne a la propriété de Feller.
 - (2) Trouver une fonction de Lyapunov.
 - (3) Montrer que toute mesure de probabilité stationnaire est supportée sur $[1, 2]$.
- 🔦 **Exercice 98** (Une dynamique sur le cercle). Soient (Θ_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur le cercle unité et f une transformation continue du cercle. On suppose que la loi commune est absolument continue par rapport à la mesure de Haar et que la densité est minorée par $c > 0$. On considère la dynamique

$$X_{n+1} = f(X_n)\Theta_{n+1}.$$

- (1) Montrer qu'il s'agit d'une chaîne de Markov et donner le noyau de transition.
- (2) Montrer qu'il y existe une unique mesure de probabilité stationnaire.

5. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

5.1. Chaînes de Markov et statistiques.

- ♥ **Exercice 99** (Chaîne de Markov cachée). Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace $\mathbb{X}$ au plus dénombrable, de loi initiale μ_0 et de noyau de transition Q . On se donne un second espace $\mathbb{Y}$ au plus dénombrable, un noyau markovien R de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{Y}$, et une famille $(Y_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Y}$ telle que, conditionnellement à $(X_k)_{k \geq 0}$, les $(Y_n)_n$ soient indépendantes de loi respective $R(X_n, \cdot)$. Autrement dit, pour tous $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{X}$ et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{Y}$,

$$\mathbf{P}[Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \prod_{k=0}^n R(x_k, y_k).$$

On observe (Y_n) mais pas (X_n) : on parle de *chaîne de Markov cachée*. Dans tout l'exercice, on suppose que les événements conditionnants ci-dessous sont de probabilité strictement positive.

- (1) Vérifier que (X_n) est bien une chaîne de Markov de noyau Q (il n'y a rien à faire), et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] = \mu_0(x_0) R(x_0, y_0) \prod_{k=1}^n Q(x_{k-1}, x_k) R(x_k, y_k).$$

- (2) On fixe une suite d'observations $(y_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ et on pose, pour $x \in \mathbb{X}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n(x) := \mathbf{P}[X_n = x \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n].$$

En utilisant la formule de Bayes discrète, montrer que

$$\pi_0(x) = \frac{\mu_0(x) R(x, y_0)}{\sum_{z \in \mathbb{X}} \mu_0(z) R(z, y_0)}, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

- (3) (*Étape de prédiction*) Montrer que

$$\mathbf{P}[X_{n+1} = x \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] = \sum_{z \in \mathbb{X}} \pi_n(z) Q(z, x), \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Indication : conditionner par X_n , et utiliser que, sachant X_n , l'état X_{n+1} est indépendant de $(Y_0, \dots, Y_n)$.

- (4) (*Étape de mise à jour*) En déduire, de nouveau par la formule de Bayes discrète, que

$$\pi_{n+1}(x) = \frac{R(x, y_{n+1}) \sum_{z \in \mathbb{X}} \pi_n(z) Q(z, x)}{\sum_{x' \in \mathbb{X}} R(x', y_{n+1}) \sum_{z \in \mathbb{X}} \pi_n(z) Q(z, x')}, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Cette récursion (prédiction puis mise à jour) est le *filtre bayésien* associé à la chaîne cachée.

- (5) *Application*. On prend $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \{0, 1\}$, avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad p, q, \varepsilon \in (0, 1),$$

c'est-à-dire que Y_n est une observation de X_n à travers un canal bruité symétrique de taux d'erreur ε . Écrire la récursion de la question (4) comme une fonction explicite $\pi_{n+1}(1) = \Phi(\pi_n(1), y_{n+1})$ d'une seule variable réelle $\pi_n(1) \in [0, 1]$.

- (6) Que devient la récursion précédente lorsque $\varepsilon = 1/2$? Interpréter.

5.2. Convergence en loi dans les espaces fonctionnelles.

- 🔴 **Exercice 100** (Convergence forte vs convergence faible). Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne. On pose

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{e_k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On équipe $\mathbb{H}$ maintenant de la topologie faible τ . En général $(\mathbb{H}, \tau)$ n'est pas polonais. Soit $\mathbb{X}$ la boule unité fermée, on admet (ou on pourra essayer de le démontrer), que $(\mathbb{X}, \tau)$ est polonais. Vu que $(\mu_n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ on est bien dans le cadre du cours.

- (1) Montrer que la suite (μ_n) est équitendue.
- (2) Montrer que la suite (μ_n) converge et calculer sa limite.
- (3) Montrer que, lorsque l'on équipe $\mathbb{H}$ de la topologie forte, la suite (μ_n) n'est pas équitendue.

🔦 **Exercice 101** (Vecteur gaussien en dimension infinie). Pour $s \in \mathbb{R}$ on considère l'espace de Hilbert ℓ_2^s des suites (x_n) à valeurs réelles telles que

$$\|x\|_s^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^{-s} x_n^2 < \infty.$$

- (1) Vérifier que ce sont bien des Hilbert.
- (2) Montrer que pour $s < s'$, l'injection $\ell_s^2 \hookrightarrow \ell_{s'}^2$ est compacte.
- (3) Pour $s > 1$, montrer que la suite $\mu_n := \mathcal{N}(0, \text{Id}_n)$ est tendue vue comme une mesure sur ℓ_s^2 .

🔦 **Exercice 102** (Mesure de Wiener). On travaille sur l'espace de Banach $\mathbb{X}$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ avec $\chi(t) := \max\{\min\{t, 1\}, 0\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère (G_k) une suite de variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes, puis on définit une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{X}$ par

$$X_n(t) := n^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-1} G_k \chi(nt - k), \quad \forall t \in [0, 1].$$

- (1) Montrer que (X_n) est équitendue. *Indication* : Utiliser le théorème de Prokhorov avec la caractérisation explicite des compacts de $\mathbb{X}$ par le théorème d'Arzelà–Ascoli.
- (2) Montrer que pour tout $t_1, \dots, t_k$, $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k))$ converge en loi (en tant que variables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$) vers une loi que l'on spécifiera.
- (3) En déduire que (X_n) converge en loi.

5.3. Marches aléatoires sur des groupes.

🔦 **Exercice 103** (Transcience des arbres réguliers). On considère $\mathbb{T}_d$ l'arbre d -régulier pour un $d \in \mathbb{N}$ avec $d \geq 3$. C'est le graphe non orienté avec une infinité dénombrable de sommets et tel que chaque sommet a exactement d voisins. Un *chemin* est une suite de sommets $x_1, \dots, x_l$ telle que (x_i, x_{i+1}) soit une arête pour tout $i \in \{1, \dots, l-1\}$. La *longueur* d'un tel chemin est l . On appelle un chemin dont aucun sommet ne se répète une *géodésique*. Pour deux sommets x et y on note $\rho(x, y)$ la plus petite longueur parmi tous les chemins qui relient x à y . On considère la marche aléatoire simple sur ce graphe : à chaque instant on choisit un voisin uniformément au hasard, c'est l'état d'après. Plus précisément, c'est la chaîne de Markov associée à la probabilité de transition

$$q(x, \cdot) := \text{Uniforme}\{\text{voisins de } x\}.$$

On fixe également une origine $o \in \mathbb{T}_d$ de manière arbitraire, et on écrit $|x| := \rho(o, x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}_d$. On commence la chaîne en o , c'est-à-dire que l'on travaille sous $\mathbf{P}_o$.

- (1) Justifier rapidement le choix arbitraire de l'origine, c'est-à-dire qu'aucun point ne mérite plus qu'un autre d'être appelé l'origine.
- (2) Montrer que la mesure de comptage est (à constante multiplicative près), l'unique mesure réversible de la chaîne (X_n) .
- (3) Montrer que ρ est une distance, que pour x et $y \in \mathbb{T}_d$, il existe une unique géodésique, notée $[x : y]$, qui relie x à y , et que $\rho(x, y)$ est la longueur de $[x : y]$.

- (4) Montrer que $Z_n := \rho(X_n, X_0)$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états et les probabilités de transition.
- (5) Montrer que la chaîne (Z_n) est irréductible. Quelle est sa période?
- (6) Soit ν la mesure image de la mesure de comptage sur $\mathbb{T}_d$ par l'application $\mathbb{T}_d \ni x \mapsto \rho(x, o) \in \mathbb{N}$. Montrer que ν est stationnaire pour (Z_n) . Est-elle réversible?
- (7) Calculer explicitement $\nu(n)$ en fonction de d et $n \in \mathbb{N}$.
- (8) Montrer que $Z_n \rightarrow \infty$ presque sûrement et en déduire que (X_n) est transiente.
- (9) Que se passerait-il pour $d \in \{1, 2\}$?

♥ **Exercice 104** (Bord des arbres réguliers). On se place dans le cadre de l'exercice précédent. Un *rayon* est un chemin infini, c'est-à-dire une suite, de sommets $(x_1, x_2, \dots)$ sans répétition. Un *bout* de $\mathbb{T}_d$ est une classe d'équivalence de rayons. Le *bord* $\partial\mathbb{T}_d$ de $\mathbb{T}_d$ est l'ensemble des bouts. On pose $\hat{\mathbb{T}}_d := \mathbb{T}_d \cup \partial\mathbb{T}_d$.

- (1) Soient $x \in \mathbb{T}_d$ et $\xi \in \partial\mathbb{T}_d$. Montrer qu'il existe un unique rayon qui commence en x et qui est un représentant de ξ . On note ce rayon $[x : \xi]$.
- (2) Pour $v \neq w \in \hat{\mathbb{T}}_d$, montrer qu'il existe un unique élément de $\mathbb{T}_d$ qui est le dernier point commun de $[o : v]$ et $[o : w]$. On note $v \wedge w$ cet élément.
- (3) Vérifier que la quantité suivante définit une distance ultramétrique sur $\hat{\mathbb{T}}_d$.

$$\theta(v, w) := \begin{cases} 0, & \text{si } v = w; \\ \exp(-|v \wedge w|), & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (4) Montrer que muni de cette distance $\hat{\mathbb{T}}_d$ est un espace compact séparé totalement discontinu et qu'une prébase de la topologie est donnée par

$$\hat{\mathbb{T}}_d(x, y) := \{v \in \hat{\mathbb{T}}_d : y \in [x : v]\}.$$

- (5) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_∞ à valeurs dans $\partial\mathbb{T}_d$, telle que pour tout $x \in \mathbb{T}_d$

$$X_n \xrightarrow[\mathbf{P}_x - p.s.]{n \rightarrow \infty} X_\infty.$$

On note π_x la loi de X_∞ sous $\mathbf{P}_x$, c'est-à-dire

$$\pi_x(B) = \mathbf{P}_x[X_\infty \in B], \quad x \in \mathbb{T}_d, B \subset \partial\mathbb{T}_d \text{ borélien.}$$

- (6) Vérifier que

$$\pi_x = \frac{1}{d} \sum_{y \sim x} \pi_y.$$

- (7) Montrer que $L^1(\pi_x) = L^1(\pi_y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{T}_d$. On note $L^1(\partial\mathbb{T}_d)$ pour cet espace.
- (8) Montrer que pour $\varphi \in L^1(\partial\mathbb{T}_d)$ alors

$$h(x) := \int \varphi d\pi_x, \quad \forall x \in \mathbb{T}_d,$$

est harmonique.

- (9) Montrer que toute fonction harmonique bornée est de la forme précédente.

- (10) En déduire que la mesure de comptage n'est pas la seule mesure stationnaire.

♥ **Exercice 105** (Groupe libre). On considère le groupe libre à $k \geq 2$ éléments $\mathbb{F}_k := \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ et on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{F}_k$, c'est-à-dire on considère une suite (ε_n) de variables aléatoires indépendantes de loi $\nu := \text{Uniforme}\{a_1, a_1^{-1}, \dots, a_k, a_k^{-1}\}$, et on pose

$$X_{n+1} = X_n \varepsilon_{n+1}.$$

(1) Justifier que le graphe d'incidence est donné par $\mathbb{T}_d$ avec $d := 2k$ et que l'on peut se ramener aux deux exercices précédents.

(2) Montrer que $\mathbb{F}_k$ agit sur $\partial\mathbb{F}_k$.

Contrairement au cas des arbres, il y a une origine « canonique » dans $\mathbb{F}_k$: c'est e . Notons donc $\pi = \pi_e$ où π_x est la famille de mesures limites obtenue à l'exercice précédent. Pour $x \in \mathbb{F}_k$, on écrit pour tout borélien B du bord :

$$x_*\pi(B) := \pi(x^{-1}B).$$

(3) Montrer que $x_*\pi = \pi_x$.

(4) En déduire que π est invariante par convolution : $\nu * \pi = \pi$.

(5) Expliquer pourquoi cela justifie que l'on appelle π une mesure stationnaire.

♥ **Exercice 106 (Groupe modulaire).** On considère le groupe des transformations de $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1.$$

Classiquement ce groupe s'identifie à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1 et où l'on identifie M et $-M$. Le groupe est généré par deux transformations :

- $z \mapsto -\frac{1}{z}$ qui correspond à la matrice

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- $z \mapsto z + 1$ qui correspond à la matrice

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ils satisfont les relations $S^2 = I$ et $(ST)^3 = I$. En posant $R := ST$, on trouve la présentation suivante

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, R : S^2 = 1, R^3 = 1 \rangle.$$

On considère la marche aléatoire associée à cette présentation, c'est-à-dire la loi des sauts est $\nu := \mathrm{Uniforme}\{R, R^{-1}, S\}$.

- (1) Démontrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est le produit libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. *Indication* : Utiliser les générateurs et les relations.
- (2) En déduire que le graphe d'incidence (graphe de Cayley) est un arbre trois réguliers ou chaque sommet est remplacé par une copie du graphe de Cayley de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- (3) Montrer que la chaîne est irréductible et calculer sa période.
- (4) Montrer que la chaîne est transiente.
- (5) Discuter la généralisation de la notion de bord vue pour les arbres à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

5.4. Analyse spectrale.

♥ **Exercice 107 (Transcience et rayon spectral).** Soit Q une matrice stochastique irréductible sur un espace dénombrable $\mathbb{X}$ et réversible par rapport à une mesure stationnaire m (non nécessairement finie).

- (1) Montrer que la quantité $\limsup_{n \rightarrow \infty} (Q^n(x, y))^{1/n}$ est indépendante de x et $y \in \mathbb{X}$. On la note $\rho(Q)$. *Indication* : C'est proche de l'argument utilisé pour l'alternative transience / récurrence dans le cours.
- (2) Montrer que Q définit un opérateur symétrique sur $\ell^2(m)$.

- (3) Soit φ une fonction positive à support fini, montrer que la suite

$$n \mapsto \frac{\|Q^{n+1}\varphi\|^2}{\|Q^n\varphi\|^2},$$

est croissante et qu'elle a la même limite que $n \mapsto \|Q^n\varphi\|^{2/n}$.

- (4) Montrer que cette limite est $\rho(Q)$.
 (5) Dédire que Q est borné sur $\ell^2(m)$ et que $\|Q\| \leq \rho(Q)$.
 (6) Montrer que l'on a en fait égalité.
 (7) En déduire que la chaîne est transiente si $\|Q\| < 1$.

♥ *Exercice 108 (Analyse spectrale sur l'arbre régulier).* On travaille avec la marche aléatoire simple Q sur l'arbre régulier $\mathbb{T}_d$ qui est réversible par rapport à la mesure de comptage m .

- (1) Montrer que le spectre de Q est continu avec

$$\sigma(Q) = \left[-2\frac{\sqrt{d-1}}{d}, 2\frac{\sqrt{d-1}}{d} \right].$$

- (2) En déduire une autre preuve de la transience.